

М.К.ДАУЫЛБАЕВ

**СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЕННЫЕ
ИНТЕГРО-
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ**

Ответственный редактор: $\text{Қазақстан Республикасының Ғылым Академиясының академигі}$
член-корр. НАН РК, доктор физико-математических наук,
профессор *К.А. Касымов*

Рецензенты:
член-корр. НАН РК, доктор физико-математических наук,
профессор *М.О. Отельбаев*;
доктор физико-математических наук, профессор
М.Т. Дженалиев

Дауылбаев М.К.

Сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения. – Алматы: Казак университеті, 1999.-170 с.

Монография посвящена асимптотической теории задач Коши с особенностями для сингулярно возмущенных линейных и слабонелинейных интегро-дифференциальных уравнений произвольного порядка. Даны асимптотические оценки решений и разности между решениями линейных сингулярно возмущенных и невозмущенных задач. Построены и обоснованы асимптотические разложения решений этих уравнений.

Книга предназначена для студентов, аспирантов, а также для специалистов, работающих в области теории дифференциальных уравнений, прикладной математики и механики.

Библиогр. 23 назв.

©Издательство «Казак университеті», 1999.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Постановка задачи.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \dots + A_n(t)y = F(t) + \int_0^1 [K_0(t, x)y(x, \varepsilon) + \dots + K_{n-1}(t, x)y^{(n-1)}(x, \varepsilon)]dx \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$y(1, \varepsilon) = \alpha_0, \quad y'(1, \varepsilon) = \alpha_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(1, \varepsilon) = \alpha_{n-1}, \quad (2)$$

где $\alpha_i, i = \overline{0, n-1}$ — некоторые известные постоянные.

Предположим, что выполнены следующие условия:

I. Функции $A_i(t), F(t), i = \overline{1, n}$ на отрезке $[0, 1]$, а $K_j(t, x), j = \overline{0, n-1}$ в области $D = (0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1)$ являются достаточно гладкими, причем $K_{n-1}(t, 0) \neq 0, t \in [0, 1]$.

Требования II-VI главы 1 остаются без изменений. Обозначим их снова II-VI.

Так как интегро-дифференциальная задача (1), (2) обладает явлением начального скачка $(n-2)$ -го порядка (см. теорему 1, гл.1), то для построения асимптотики решения задачи (1), (2) предварительно рассмотрим вспомогательную задачу Коши с начальным скачком в левой точке $t = 0$:

$$y^{(i)}(0, \varepsilon) = a^i(\varepsilon), y^{(n-1)}(0, \varepsilon) = \frac{c(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad i = \overline{0, n-2}, \quad (3)$$

где $a^i(\varepsilon), c(\varepsilon), i = \overline{0, n-2}$ регулярно зависят от ε и имеют следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned} a^i(\varepsilon) &= a_0^i + \varepsilon a_1^i + \dots, & i &= \overline{0, n-1}, \\ c(\varepsilon) &= c_0 + \varepsilon c_1 + \dots, & c_0 &\neq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

а $a_k^i, c_k, k = 0, 1, \dots$ — пока неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Рассмотрим вырожденное уравнение:

$$\begin{aligned} A_1(t) \bar{y}^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(t) \bar{y}' + A_n(t) \bar{y} &= F(t) + \Delta(t) + \\ + \int_0^1 [K_0(t, x) \bar{y}(x) + \dots + K_{n-1}(t, x) \bar{y}^{(n-1)}(x)] dx \end{aligned} \quad (5)$$

с начальными условиями:

$$\bar{y}^{(i)}(0) = a_0^i, \bar{y}^{(n-2)}(0) = a_0^{n-2} + \Delta a_0^{n-2}, i = \overline{0, n-3} \quad (6)$$

где $\Delta(t), \Delta a_0^{n-2}$ — так называемые начальные скачки интегрального члена и $(n-2)$ -ой производной решения соответственно, определяемые из формул начального скачка:

$$\Delta(t) = K_{n-1}(t, 0) \Delta a_0^{n-2}, \quad \Delta a_0^{n-2} = \frac{c_0}{A_1(0)} \quad (7)$$

Задача Коши (5), (6) называется вырожденной для задачи с начальным скачком (1), (3).

**Алгоритм построения асимптотики решения
вспомогательной задачи Коши с начальным скачком.**

Асимптотическое разложение решения задачи (1), (3) ищем в виде:

$$y(t, \varepsilon) = y_\varepsilon(t) + \varepsilon^{n-2} w_\varepsilon(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad (8)$$

где $y_\varepsilon(t)$ — регулярная часть и $w_\varepsilon(\tau)$ — погранслоиная часть асимптотического решения задачи (1), (3) определяются в виде:

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(t) &= y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \dots, \\ w_\varepsilon(\tau) &= w_0(\tau) + \varepsilon w_1(\tau) + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Предварительно умножив обе части (1) на ε , а затем, подставляя (8) в (1), имеем:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 y_\varepsilon^{(n)}(t) + w_\varepsilon^{(n)}(\tau) + \varepsilon A_1(t) y_\varepsilon^{(n-1)}(t) + A_1(\varepsilon\tau) w_\varepsilon^{(n-1)}(\tau) + \\ &+ \varepsilon A_2(t) y_\varepsilon^{(n-2)}(t) + \varepsilon A_2(\varepsilon\tau) w_\varepsilon^{(n-2)}(\tau) + \dots + \\ &+ \varepsilon A_{n-1}(t) y_\varepsilon'(t) + \varepsilon^{n-2} A_{n-1}(\varepsilon\tau) \dot{w}_\varepsilon(\tau) + \varepsilon A_n(t) y_\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon^{n-1} A_n(\varepsilon\tau) w_\varepsilon(\tau) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon F(t) + \varepsilon \int_0^1 [K_0(t, x) y_\varepsilon(x) + K_1(t, x) y'_\varepsilon(x) + \dots + \\
&+ K_{n-1}(t, x) y_\varepsilon^{(n-1)}(x)] dx + \varepsilon \int_0^1 [\varepsilon^{n-2} K_0(t, x) w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \\
&+ \varepsilon^{n-3} K_1(t, x) \dot{w}_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots + \varepsilon^{-1} K_{n-1}(t, x) w_\varepsilon^{(n-1)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)] dx,
\end{aligned} \tag{10}$$

где (i) сбоку и сверху означают производные i -го порядка по t и τ соответственно. В последнем интеграле правой части (10) сделаем замену $s = \frac{x}{\varepsilon}$ и верхний предел $\frac{1}{\varepsilon}$ заменим на ∞ . Тогда, выписывая члены, зависящие от t и τ отдельно, из (10) имеем следующие два уравнения для определения $y_\varepsilon(t)$ и $w_\varepsilon(\tau)$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon y_\varepsilon^{(n)}(t) + A_1(t) y_\varepsilon^{(n-1)}(t) + \dots + A_n(t) y_\varepsilon(t) = F(t) + \\
&+ \int_0^1 [K_0(t, x) y_\varepsilon(x) + \dots + K_{n-1}(t, x) y_\varepsilon^{(n-1)}(x)] dx + \\
&+ \int_0^\infty [\varepsilon^{n-1} K_0(t, \varepsilon s) w_\varepsilon(s) + \dots + K_{n-1}(t, \varepsilon s) w_\varepsilon^{(n-1)}(s)] ds,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&w_\varepsilon^{(n)}(\tau) + A_1(\varepsilon \tau) w_\varepsilon^{(n-1)}(\tau) + \varepsilon A_2(\varepsilon \tau) w_\varepsilon^{(n-2)}(\tau) + \\
&+ \dots + \varepsilon^{n-2} A_{n-1}(\varepsilon \tau) \dot{w}_\varepsilon(\tau) + \varepsilon^{n-1} A_n(\varepsilon \tau) w_\varepsilon(\tau) = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя разложение (9) в (11), (12) и разлагая функции

$A_i(\varepsilon\tau), i = \overline{1, n}, \quad K_j(t, \varepsilon\tau), j = \overline{0, n-1}$ в ряды по степеням ε , а затем, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим последовательность уравнений для определения $y_k(t), w_k(\tau)$.

Для $y_k(t), k = 0, 1, \dots$ имеем линейные интегро-дифференциальные уравнения :

$$\begin{aligned} & A_1(t)y_0^{(n-1)}(t) + A_2(t)y_0^{(n-2)}(t) + \dots + A_n(t)y_0(t) = \\ & = F(t) + \int_0^\infty K_{n-1}(t, 0) w_\varepsilon^{(n-1)}(s) ds + \\ & + \int_0^1 [K_0(t, x)y_0(x) + \dots + K_{n-1}(t, x)y_0^{(n-1)}(x)] dx, \end{aligned} \quad (13_0)$$

$$\begin{aligned} & A_1(t)y_k^{(n-1)}(t) + A_2(t)y_k^{(n-2)}(t) + \dots + A_n(t)y_k(t) = \\ & = F_k(t) + \int_0^1 [K_0(t, x)y_k(x) + \dots + \\ & + K_{n-1}(t, x)y_k^{(n-1)}(x)] dx, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13_k)$$

где $F_k(t)$ — уже известная функция, выражаемая формулой:

$$\begin{aligned} F_k(t) = \int_0^\infty \sum_{i=0}^k \frac{S^i}{i!} (K_{n-1-x}^{(i)}(t, 0) w_{k-i}^{(n-1)}(s) + \dots + \\ + K_{0x}^{(i)}(t, 0) w_{k+1-n-i}(s)) ds - y_{k-1}^{(n)}(t), \end{aligned} \quad (14)$$

причем $w_l^{(i)}(s) \equiv 0$ при $l < 0$.

Для определения $w_0(\tau)$ имеем однородное, а для $w_k(\tau)$ — неоднородное дифференциальное уравнение:

$$w_0^{(n)}(\tau) + A_1(0) w_0^{(n-1)}(\tau) = 0, \quad (15_0)$$

$$w_k^{(n)}(\tau) + A_1(0) w_k^{(n-1)}(\tau) = \Phi_k(\tau), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (15_k)$$

где $\Phi_k(\tau)$ — уже известная функция, зависящая от $w_i(\tau), i < k$:

$$\begin{aligned} \Phi_k(\tau) = & - \sum_{i=0}^k \frac{\tau^i}{i!} (A_{k+1-i}^{(i)}(0) w_0^{(n-k-1+i)}(\tau) + \\ & + A_{k-i}^{(i)}(0) w_1^{(n-k+i)}(\tau) + \dots + A_{2-i}^{(i)}(0) w_{k-1}^{(n-2+i)}(\tau)), \end{aligned} \quad (16)$$

причем $A_l^{(i)}(0) \equiv 0$ при $l \leq 0$.

Определим теперь начальные условия для коэффициентов $y_k(t), w_k(\tau)$. Для этого подставим разложение (8) с учетом (9) в начальные условия (3) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Тогда имеем:

$$y_0^{(i)}(0) = \begin{cases} a_0^i, & i < n-2, \\ a_0^i - w_0^{(i)}(0), & i = n-2, \end{cases} \quad (17_0)$$

$$w_0^{(n-1)}(0) = c_0, \quad (18_0)$$

$$y_k^{(i)}(0) = \begin{cases} a_k^i, & k+i < n-2, \\ a_k^{(i)} - w_{k+i-n+2}^{(i)}(0), & k+i \geq n-2, \end{cases} \quad i = \overline{0, n-2},$$

(17_к)

$$w_k^{(n-1)}(0) = c_k - y_{k-1}^{(n-1)}(0),$$

(18_к)

Чтобы найти недостающие начальные условия $w_0^{(i)}(0), i = \overline{0, n-2}$ обратимся к уравнению (15₀) и интегрируем его от 0 до ∞ и потребуем выполнения условий: $w_0^{(n-1)}(\infty) = w_0^{(n-2)}(\infty) = 0$. Тогда получим:

$$w_0^{(n-1)}(0) + A_1(0) w_0^{(n-2)}(0) = 0$$

(19)

Из (19), с учетом (18₀), имеем:

$$w_0^{(n-2)}(0) = -\frac{c_0}{A_1(0)}$$

(20)

Тогда с учетом (20) начальные условия (17₀) примут вид:

$$y_0^{(i)}(0) = a_0^i, i = \overline{0, n-3},$$

$$y_0^{(n-2)}(0) = a_0^{n-2} + \frac{c_0}{A_1(0)}$$

(21₀)

Интегрируем уравнение (15₀) с учетом (19) сначала от 0 до τ , а затем от 0 до ∞ и потребуем $w_0^{(n-3)}(\infty) = 0, w_0^{(n-2)}(\infty) = 0$. Тогда получим:

$$w_0^{(n-2)}(0) + A_1(0) w_0^{(n-3)}(0) = 0$$

Отсюда, с учетом (20), имеем:

$$w_0^{(n-3)}(0) = \frac{c_0}{A_1^2(0)}$$

Продолжая этот процесс, получим следующие начальные условия для $w_0(\tau)$:

$$w_0^{(i)}(0) = (-1)^{n-1-i} \frac{c_0}{A_1^{n-1-i}(0)}, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (22_0)$$

Итак, уравнение (13₀) решается при начальных условиях (21₀), а уравнение (15₀)- при начальных условиях (22₀) и, тем самым, нулевые приближения определены полностью.

Сравнивая задачи (5), (6) и (13₀), (21₀) получаем равенства

$$\Delta a_0^{n-2} = \frac{c_0}{A_1(0)}, \Delta(t) = \int_0^\infty K_{n-1}(t, 0) w_0^{(n-1)}(s) ds, \text{ из которых в}$$

силу решения $w_0^{(n-1)}(\tau) = c_0 \exp(-A_1(0)\tau)$ задачи (15₀), (22₀) получаем формулу (7).

Для определения последующих приближений обратимся к уравнению (15_k) и интегрируем его от 0 до ∞ . Тогда, требуя

$$w_k^{(n-1)}(\infty) = w_k^{(n-2)}(\infty) = 0, \text{ имеем:}$$

$$w_k^{(n-1)}(0) + A_1(0) w_k^{(n-2)}(0) = - \int_0^\infty \Phi_k(\tau) d\tau \quad (23)$$

Отметим, что все несобственные интегралы, входящие в (23) и в другие выражения, сходятся (см.(29)).

Подставляя в (23) начальные условия (18_k), получим:

$$w_k^{(n-2)}(0) = -\frac{1}{A_1(0)} \left[c_k - y_{k-1}^{(n-1)}(0) + \int_0^\infty \Phi_k(\tau) d\tau \right] \quad (24)$$

Интегрируя теперь (15_к) от 0 до τ , и учитывая (23) имеем:

$$w_k^{(n-1)}(\tau) + A_1(0) w_k^{(n-2)}(\tau) = - \int_\tau^\infty \Phi_k(s) ds \quad (25)$$

Интегрируем (25) от 0 до ∞ , и требуя выполнение условий: $w_k^{(n-3)}(\infty) = w_k^{(n-2)}(\infty) = 0$, имеем:

$$w_k^{(n-2)}(0) + A_1(0) w_k^{(n-3)}(0) = - \int_0^\infty \tau \Phi_k(\tau) d\tau \quad (26)$$

Подставляя (24) в (26) получаем:

$$w_k^{(n-3)}(0) = \frac{1}{A_1^2(0)} \left[c_k - y_{k-1}^{(n-1)}(0) + \int_0^\infty (1 + A_1(0)\tau) \Phi_k(\tau) d\tau \right].$$

И так далее, по индукции для уравнения (15_к) получаем следующие начальные условия:

$$w_k^{(i)}(0) = \frac{(-1)^{n-1-i}}{A_1^{n-1-i}(0)} \left[c_k - y_{k-1}^{(n-1)}(0) + \int_0^\infty \sum_{j=0}^{n-2-i} \frac{\tau^j}{j!} A_1^j(0) \Phi_k(\tau) d\tau \right], i = \overline{0, n-1} \quad (22_{\text{к}})$$

Тогда начальные условия (17_к) с учетом (22_к) представимы в виде:

$$y_k^{(i)}(0) = \begin{cases} a_k^i, k+i < n-2, \\ a_k^{(i)} - w_{k+i-n+2}^{(i)}(0), k+i \geq n-2, \end{cases} \quad i = \overline{0, n-3},$$

$$y_k^{(n-2)}(0) = a_k^{n-2} + \frac{1}{A_1(0)} \left[c_k - y_{k-1}^{(n-1)}(0) + \int_0^\infty \Phi_k(\tau) d\tau \right] \quad (21_k)$$

Таким образом, уравнение (15_к) решаем при начальных условиях (22_к), а уравнение (13_к) - при начальных условиях (21_к) и, тем самым, k – ые приближения определены полностью.

Оценка пограничных функций

Лемма (Об оценке пограничных функций).

Пусть выполнены условия I, II. Тогда для решений $w_0(\tau), w_k(\tau), k \geq 1$ задач (15₀), (22₀) и (15_к), (22_к) при $\tau \geq 0$ справедливы следующие оценки:

$$\left| w_k^{(i)}(\tau) \right| \leq K \exp(-\gamma\tau), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (27_k)$$

где $K > 0$, $0 < \gamma < \bar{\gamma}$ – некоторые постоянные, не зависящие от t и ε .

Доказательство. Докажем оценки (27_к) методом математической индукции. При $k = 0$ решая уравнение (15₀) с начальным условием (22₀), имеем:

$$w_0^{(n-1)}(\tau) = c_0 \exp(-A_1(0)\tau) \quad (28)$$

Оценивая (28) с учетом условия II, получим для $w_0^{(n-1)}(\tau)$ оценку (27₀). Тогда из равенств

$$w_0^{(n-2)}(\tau) = -\int_{\tau}^{\infty} w_0^{(n-1)}(\tau) d\tau, \dots, w_0(\tau) = -\int_{\tau}^{\infty} w_0^{(n-2)}(\tau) d\tau$$

последовательно получаем оценки (27₀) для $i = \overline{0, n-2}$.

Тем самым, оценки (27_к) для $k = 0$ доказаны.

Предположим, что оценки (27_к) справедливы до номера $k-1$. Докажем для номера k . С учетом индуктивного предположения из (16) получим оценку:

$$|\Phi_k(\tau)| \leq K \exp(-\gamma\tau), \quad \tau \geq 0 \quad (29)$$

Из уравнения (15_к) с учетом начальных условий (22_к) имеем:

$$w_k^{(n-1)}(\tau) = (c_k - y_{k-1}^{(n-1)}(0)) \exp(-A_1(0)\tau) + \int_0^{\tau} \Phi_k(\xi) \exp(-A_1(0)(\tau - \xi)) d\xi \quad (30)$$

Оценивая (30) с учетом II и оценки (29), имеем оценку (27_к) для $w_k^{(n-1)}(\tau)$. Тогда из равенств

$$w_k^{(n-2)}(\tau) = -\int_{\tau}^{\infty} w_k^{(n-1)}(\tau) d\tau, \dots, w_k^{(i)}(\tau) = -\int_{\tau}^{\infty} w_k^{(i+1)}(\tau) d\tau$$

непосредственно следуют оценки (27_к) для $w_k^{(i)}(\tau)$, $i = \overline{0, n-2}$.

Тем самым, оценки (27_к) $\forall k \geq 0$ доказаны. Лемма доказана.

Разрешимость уравнений регулярных членов асимптотики.

Обратимся к линейному интегро-дифференциальному уравнению (13_k), $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} & A_1(t)y_k^{(n-1)}(t) + A_2(t)y_k^{(n-2)}(t) + \dots + A_n(t)y_k(t) = \\ & = \overline{F}_k(t) + \int_0^1 [K_0(t,x)y_k(x) + \dots + K_{n-1}(t,x)y_k^{(n-1)}(x)]dx, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\overline{F}_k(t)$ имеет вид:

$$\overline{F}_k(t) = \begin{cases} F(t) + K_{n-1}(t,0)\Delta a_0^{n-2}, & k = 0, \\ F_k(t), & k \geq 1. \end{cases} \quad (32)$$

Пусть функции $\Psi_i(t,s), i = \overline{0, n-2}$ являются решением задачи:

$$L_0 \Psi_i(t,s) = 0, \Psi_{it}^{(j)}(s,s) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} j = \overline{0, n-2}. \quad (33)$$

Тогда решение задачи (31), (21_k) представимо в виде:

$$\begin{aligned} y_k(t) = & y_k(0)\Psi_0(t,0) + \dots + y_k^{(n-2)}(0)\Psi_{n-2}(t,0) + \\ & + \int_0^t \frac{1}{A_1(s)} \Psi_{n-2}(t,s)z_k(s)ds, \end{aligned} \quad (34)$$

где через $z_k(t)$ обозначена правая часть (31), т.е.

$$z_k(t) = \bar{F}_k(t) + \int_0^1 [K_0(t, x)y_k(x) + \dots + K_{n-1}(t, x)y_k^{(n-1)}(x)]dx. \quad (35)$$

Подставляя (34) в (35) относительно $z_k(t)$ получаем интегральное уравнение:

$$z_k(t) = f_k(t) + \int_0^1 K(t, s)z_k(s)ds, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} f_k(t) = & \bar{F}_k(t) + y_k(0) \int_0^1 [K_0(t, x)\Psi_0(x, 0) + \dots + \\ & + K_{n-1}(t, x)\Psi_0^{(n-1)}(x, 0)]dx + \dots + \\ & + y_k^{(n-2)}(0) \int_0^1 [K_0(t, x)\Psi_{n-2}(x, 0) + \dots + K_{n-1}(t, x)\Psi_{n-2}^{(n-1)}(x, 0)]dx, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} K(t, s) = & \frac{K_{n-1}(t, s)}{A_1(s)} + \\ & + \int_s^1 \frac{1}{A_1(s)} [K_0(t, x)\Psi_{n-2}(x, s) + \dots + K_{n-1}(t, x)\Psi_{n-2}^{(n-1)}(x, s)]dx. \end{aligned}$$

В силу условия VI интегральное уравнение (36) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$z_k(t) = f_k(t) + \int_0^1 R(t, s)f_k(s)ds, \quad (38)$$

где $R(t, s)$ — резольвента ядра $K(t, s)$.

Подставляя теперь (38) с учетом (37) в правую часть (34), получим решение задачи (31), (21_к) или, что, то же самое, решение задачи (13_к), (21_к) в виде:

$$y_k(t) = y_k(0)u_0(t) + \dots + y_k^{(n-2)}(0)u_{n-2}(t) + r_k(t), \quad (39_k)$$

где

$$u_i(t) = \Psi_i(t, 0) + \int_0^t \frac{\Psi_{n-2}(t, s)}{A_1(s)} \sum_{j=0}^{n-1} [\bar{K}_j(s, x) \Psi_i^{(j)}(x, 0) dx] ds, \\ i = \overline{0, n-2}, \\ r_k(t) = \int_0^t \frac{\Psi_{n-2}(t, s)}{A_1(s)} [\bar{F}_k(s) + \int_0^1 R(s, \xi) \bar{F}_k(\xi) d\xi] ds. \quad (40)$$

$$\bar{K}_j(s, x) \equiv K_j(s, x) + \int_0^1 R(s, \xi) K_j(\xi, x) d\xi, \quad j = \overline{0, n-1}$$

Оценка остаточного члена асимптотического разложения

Образует N - ую частичную сумму разложений (8), (9):

$$\bar{y}_N(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k y_k(t) + \varepsilon^{n-2} \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k w_k(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad (41)$$

где коэффициент $y_0(t)$ однозначно определяется из уравнения (13₀) с начальными условиями (21₀), а коэффициенты $y_k(t), k = \overline{1, N}$ однозначно определяются из задачи (13_к), (21_к).

В случае $N \geq n - 2$ коэффициенты $w_k(\tau)$, $k = \overline{0, N - n + 2}$ однозначно определяются из задачи (15_к), (22_к). Коэффициенты $w_k(\tau)$, $k = \overline{N - n + 3, N + 1}$ однозначно определяются из уравнения (15_к) с начальными условиями:

$$w_k^{(i)}(0) = \begin{cases} 0, & i = \overline{0, k - (N - n + 3)}, \\ \frac{(-1)^{n-1-i}}{A_1^{n-1-i}(0)} [c_k - y_{k-1}^{(n-1)}(0) + \\ + \sum_{j=0}^{n-2-i} A_1^j(0) \int_0^\infty \frac{\tau^j}{j!} \Phi_k(\tau) d\tau], \\ i = \overline{k - (N - n + 2), n - 1}. \end{cases} \quad (42)$$

В случае $N < n - 2$ коэффициенты $w_k(\tau)$, $k = \overline{0, N + 1}$ однозначно определяются из уравнения (15_к) с начальными условиями (42).

Можно убедиться, что функция $\bar{y}_N(t, \varepsilon)$, выражаемая формулой (41), удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (3) с точностью порядка $O(\varepsilon^{N+1})$, т.е.

$$L_\varepsilon \bar{y}_N = F(t) + \int_0^1 [K_0(t, x) \bar{y}_N(x, \varepsilon) + \dots + \\ + K_{n-1}(t, x) \bar{y}_N^{(n-1)}(x, \varepsilon)] dx + O(\varepsilon^{N+1}),$$

$$\bar{y}_N^{(i)}(0, \varepsilon) = \begin{cases} a_0^i + \varepsilon a_1^i + \dots + \varepsilon^N a_N^i, & i = \overline{0, n-2}, \\ \frac{c_0 + \varepsilon c_1 + \dots + \varepsilon^{N+1} c_{N+1}}{\varepsilon}, & i = \overline{n-1} \end{cases} \quad (43)$$

Разность между точным решением $y(t, \varepsilon)$ задачи (1), (3) и ее приближенным решением $\bar{y}_N(t, \varepsilon)$ называется остаточным членом асимптотики решения задачи (1), (3) и обозначим его $R_N(t, \varepsilon)$, т.е.

$$y(t, \varepsilon) - \bar{y}_N(t, \varepsilon) = R_N(t, \varepsilon) \quad (44)$$

Подставляя (44) в (1) и учитывая (43), получим для остаточного члена следующую сингулярно возмущенную задачу:

$$\begin{cases} L_\varepsilon R_N = \int_0^1 [K_0(t, x) R_N(x, \varepsilon) + \dots + \\ \quad + K_{n-1}(t, x) R_N^{(n-1)}(x, \varepsilon)] dx + f(t, \varepsilon), \\ R_N(0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}), \dots, R_N^{(n-1)}(0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}), \end{cases} \quad (45)$$

где функция $f(t, \varepsilon)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} f(t, \varepsilon) = & F(t) + \int_0^1 [K_0(t, x) \bar{y}_N(x, \varepsilon) + \dots + \\ & + K_{n-1}(t, x) \bar{y}_N^{(n-1)}(x, \varepsilon)] dx - L_\varepsilon \bar{y}_N(t, \varepsilon) \end{aligned} \quad (46)$$

и она с учетом (43) имеет оценку:

$$|f(t, \varepsilon)| \leq K\varepsilon^{N+1}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (47)$$

Уравнение (45) имеет такой же вид, что и (1). Поэтому его решение представим в виде:

$$\begin{aligned} R_N(t, \varepsilon) = & R_N(0, \varepsilon)K_0(t, 0, \varepsilon) + \dots + \\ & + R_N^{(n-1)}(0, \varepsilon)K_{n-1}(t, 0, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K_{n-1}(t, s, \varepsilon)z(s, \varepsilon)ds, \end{aligned} \quad (48)$$

где $K_i(t, s, \varepsilon), i = \overline{0, n-1}$ - функции Коши, являющиеся решением задачи (36) и имеющие оценки (49) (см. главу 1), а $z(t, \varepsilon)$ - решение интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) = & f(t, \varepsilon) + R_N(0, \varepsilon)\alpha_0(t, 0, \varepsilon) + R'_N(0, \varepsilon)\alpha_1(t, 0, \varepsilon) + \\ & + \dots + R_N^{(n-1)}(0, \varepsilon)\alpha_{n-1}(t, 0, \varepsilon) + \int_0^1 K_\varepsilon(t, s)z(s, \varepsilon)ds, \end{aligned} \quad (49)$$

где $K_\varepsilon(t, s), \alpha_i(t, 0, \varepsilon), i = \overline{0, n-1}$ выражаются формулами (53), (54) главы 1.

Теорема 4. Пусть функции $A_i(t), F(t), i = \overline{1, n}$ на отрезке $[0, 1]$, а $K_j(t, x), j = \overline{0, n-1}$ в области D - непрерывны вместе со своими производными до $(N+2)$ -го порядка включительно и выполнены условия II-VI. Тогда при достаточно малых ε решение $y(t, \varepsilon)$ задачи Коши с начальным скачком (1), (3) на отрезке $[0, 1]$ существует, единственно и представимо в виде:

$$y(t, \varepsilon) = \bar{y}_N(t, \varepsilon) + R_N(t, \varepsilon), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad (50)$$

а для остаточного члена $R_N(t, \varepsilon)$ справедливы оценки:

$$\left| R_N^{(i)}(t, \varepsilon) \right| \leq K \varepsilon^{N+1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (51)$$

где $\bar{y}_N(t, \varepsilon)$ выражается формулой (41), а $N \geq 0$ – любое целое число, $K > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от t и ε .

Доказательство. Из условия теоремы следует, что коэффициенты $y_k(t)$, $k = \overline{0, N}$ разложения (41), однозначно определяемые из задачи (13_к), (21_к), вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка ограничены на отрезке $[0, 1]$.

В силу условия II в случае $N \geq n-2$ коэффициенты $w_k^{(i)}(\tau), \tau \geq 0$ при $k = \overline{0, N-n-2}, i = \overline{0, n-1}$ являются функциями типа погранслоя, а коэффициенты $w_k^{(i)}(\tau), k = \overline{N-n+3, N+1}$, для значений $i = \overline{0, k-(N-n+3)}$ – ограничены, а для $i = \overline{k-(N-n+2), n-1}$ являются при $\tau \geq 0$ функциями типа погранслоя.

В случае $N < n-2$ функции $w_k^{(i)}(\tau), k = \overline{0, N+1}$ для значений $i = \overline{0, k-(N-n+3)}$ – ограничены при $\tau \geq 0$, а для $i = \overline{k-(N-n+2), n-1}$ являются при $\tau \geq 0$ функциями типа погранслоя.

В силу условия IV решение интегрального уравнения (49) на отрезке $0 \leq t \leq 1$ существует, единственно и представимо в виде:

$$\begin{aligned}
z(t, \varepsilon) = & f(t, \varepsilon) + R_N(0, \varepsilon)\alpha_0(t, 0, \varepsilon) + \dots + \\
& + R_N^{(n-1)}(0, \varepsilon)\alpha_{n-1}(t, 0, \varepsilon) + \int_0^1 R_\varepsilon(t, s)[f(s, \varepsilon) + \\
& + R_N(0, \varepsilon)\alpha_0(s, 0, \varepsilon) + \dots + R_N^{(n-1)}(0, \varepsilon)\alpha_{n-1}(s, 0, \varepsilon)]ds,
\end{aligned} \tag{52}$$

где $R_\varepsilon(t, s)$ – резольвента ядра $K_\varepsilon(t, s)$. Для $\alpha_i(t, 0, \varepsilon)$, $i = \overline{0, n-1}$ справедливы оценки:

$$|\alpha_i(t, 0, \varepsilon)| \leq K, |\alpha_{n-1}(t, 0, \varepsilon)| \leq K\varepsilon, i = \overline{0, n-2} \tag{53}$$

Тогда из (48) непосредственно следует, что решение задачи (45) и, тем самым, задачи (1), (3) на отрезке $0 \leq t \leq 1$ существует и единственно.

Докажем теперь оценки (51). Так как резольвента $R_\varepsilon(t, s)$ ядра $K_\varepsilon(t, s)$ ограничена, то из (52) с учетом (47), (45), (53) получаем:

$$|z(t, \varepsilon)| \leq K\varepsilon^{N+1}, \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{54}$$

Теперь, из (48), учитывая (45), (54) и оценки функций Коши (49) из главы 1, получим оценки (51). Теорема 4 доказана.

Основная задача

Вернемся теперь к исходной сингулярно возмущенной задаче (1), (2). Решение задачи Коши с начальным скачком $(n-2)$ -го порядка (1), (3) обозначим через $y(t, a^0, \dots, a^{n-2}, c, \varepsilon)$. Постоянные $a^0, \dots, a^{n-2}, c$ подберем так, чтобы при $t = 1$ это решение удовлетворяло условиям (2):

$$y^{(i)}(1, a^0, \dots, a^{n-2}, c, \varepsilon) = \alpha_i, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (55)$$

Подставим сумму (8) с учетом (9) в (55). При этом вместо точного решения подставим его асимптотическое разложение, в котором будем указывать на зависимость $y_k(t)$ не только от t , но и от $a_k^i, c_k, i = \overline{0, n-2}$. Тогда в силу оценок (27_к) из (55) имеем:

$$y_0^{(i)}(1, a_0^0, \dots, a_0^{n-2}, c_0) = \alpha_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (56_0)$$

$$y_k^{(i)}(1, a_k^0, \dots, a_k^{n-2}, c_k) = 0, \quad i = \overline{0, n-1}, k \geq 1 \quad (56_k)$$

Подставляя (39₀) в (56₀) имеем:

$$y_0(0)u_0^{(i)}(1) + \dots + y_0^{(n-2)}(0)u_{n-2}^{(i)}(1) + r_0^{(i)}(1) = \alpha_i, \quad (57)$$

$$i = \overline{0, n-1}$$

где $u_i(t), r_0(t), i = \overline{0, n-2}$ выражаются формулой (40).

Рассмотрим выражение (40) для $r_0(t)$. Отсюда с учетом (32), (7) имеем:

$$r_0(t) = \int_0^t \frac{\Psi_{n-2}(t, s)}{A_1(s)} \bar{F}(s) ds + \frac{c_0}{A_1(0)} \int_0^t \frac{\Psi_{n-2}(t, s)}{A_1(s)} \bar{K}_{n-1}(s, 0) ds \quad (58)$$

Здесь и в дальнейшем использовано обозначение

$$\bar{K}_{n-1}(s, 0) \equiv K_{n-1}(s, 0) + \int_0^1 R(s, \xi) K_{n-1}(\xi, 0) d\xi, \quad (59)$$

$$\bar{F}(s) \equiv F(s) + \int_0^1 R(s, \xi) F(\xi) d\xi$$

Подставляя (58) в (57) и учитывая (21₀), получим:

$$\begin{aligned} a_0^0 u_0^{(i)}(1) + \dots + a_0^{n-2} u_{n-2}^{(i)}(1) + c_0 u_{n-1}^{(i)}(1) &= d_0^{(i)}(1), \\ i &= \overline{0, n-1}, \end{aligned} \quad (60_0)$$

где $u_i(t), i = \overline{0, n-2}$ выражается формулой (40), а

$$\begin{aligned} u_{n-1}^{(i)}(t) &= \frac{1}{A_1(0)} \left[u_{n-2}^{(i)}(t) + \int_0^t \frac{\Psi_{n-2}^{(i)}(t, s)}{A_1(s)} \bar{K}_{n-1}(s, 0) ds \right] \\ i &= \overline{0, n-2}, \\ u_{n-1}^{(n-1)}(t) &= \frac{1}{A_1(0)} \left[u_{n-2}^{(n-1)}(t) + \frac{\bar{K}_{n-1}(t, 0)}{A_1(t)} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \frac{\Psi_{n-2}^{(n-1)}(t, s)}{A_1(s)} \bar{K}_{n-1}(s, 0) ds \right] \\ d_0^{(i)}(t) &= \alpha_i - \int_0^t \frac{\Psi_{n-2}^{(i)}(t, s)}{A_1(s)} \bar{F}(s) ds, i = \overline{0, n-2}, \\ d_0^{(n-1)}(t) &= \alpha_i - \frac{\bar{F}(t)}{A_1(t)} - \int_0^t \frac{\Psi_{n-2}^{(n-1)}(t, s)}{A_1(s)} \bar{F}(s) ds, \end{aligned} \quad (61)$$

где $\bar{K}_{n-1}(s,0), \bar{F}(s)$ имеет вид (59), а $d_0^{(i)}(1), i = \overline{0, n-1}$ не зависит от $a_0^0, \dots, a_0^{n-2}, c_0$.

Теперь подставим (39_к) в (56_к):

$$\begin{aligned} y_k(0)u_0^{(i)}(1) + \dots + y_k^{(n-2)}(0)u_{n-2}^{(i)}(1) + r_k^{(i)}(1) &= 0, \\ k = 1, 2, \dots, \quad i = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \quad (62)$$

где функция $r_k(t)$, выражаемая формулой (40), с учетом (32) примет вид:

$$r_k(t) = \int_0^t \frac{\Psi_{n-2}(t,s)}{A_1(s)} [F_k(s) + \int_0^1 R(s,\xi) F_k(\xi) d\xi] ds \quad (63)$$

Представим функцию $F_k(t)$, выражаемую формулой (14), с учетом (24) в виде:

$$\begin{aligned} F_k(t) &= \int_0^\infty K_{n-1}(t,0) w_k^{(n-1)}(s) ds + \beta_k(t) = \\ &= -K_{n-1}(t,0) w_k^{(n-2)}(0) + \beta_k(t) = \frac{K_{n-1}(t,0)}{A_1(0)} c_k + \delta_k(t), \end{aligned} \quad (64)$$

где $\delta_k(t)$ не зависит от $a_k^0, \dots, a_k^{n-2}, c_k$.

Тогда, подставляя (64) в (63), получим:

$$r_k(t) = \frac{c_k}{A_1(0)} \int_0^t \frac{\Psi_{n-2}(t,s)}{A_1(s)} \bar{K}_{n-1}(s,0) ds + \rho_k(t), \quad (65)$$

где $\rho_k(t)$ не зависит от $a_k^0, \dots, a_k^{n-2}, c_k$.

Подставив (65) в (62) и учитывая (21_к) получаем систему линейных уравнений относительно $a_k^0, \dots, a_k^{n-2}, c_k$:

$$a_k^0 u_0^{(i)}(1) + \dots + a_k^{n-2} u_{n-2}^{(i)}(1) + c_k u_{n-1}^{(i)}(1) = d_k^{(i)}(1), \quad (60_k)$$

$$i = \overline{0, n-1},$$

где $u_l(t), l = \overline{0, n-2}$ выражается формулой (40), $u_{n-1}(t)$ — формулой (61), а $d_k(t)$ не зависит от $a_k^0, \dots, a_k^{n-2}, c_k$.

Из коэффициентов при неизвестных $a_k^0, \dots, a_k^{n-2}, c_k$ системы уравнений (60_к), $k=0, 1, \dots$ образуем главный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_0(1) & \dots & u_{n-2}(1) & u_{n-1}(1) \\ u'_0(1) & \dots & u'_{n-2}(1) & u'_{n-1}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0^{(n-1)}(1) & \dots & u_{n-2}^{(n-1)}(1) & u_{n-1}^{(n-1)}(1) \end{vmatrix} \quad (66)$$

Подставляя вместо элементов $u_i^{(j)}(1), i, j = \overline{0, n-1}$ определителя Δ их значения из (40), (61) и прибавим к элементам последнего столбца элементы предпоследнего столбца, умноженные на $(-1/A_1(0))$. Тогда замечаем, что последний столбец определителя (66) будет состоять из элементов

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{A_1(0)} \int_0^1 \frac{\Psi_{n-2}(1,s)}{A_1(s)} \bar{K}_{n-1}(s,0) ds \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{A_1(0)} \int_0^1 \frac{\Psi_{n-2}^{(n-2)}(1,s)}{A_1(s)} \bar{K}_{n-1}(s,0) ds \\ \frac{1}{A_1(0)} \left[\frac{\bar{K}_{n-1}(1,0)}{A_1(1)} + \int_0^1 \frac{\Psi_{n-2}^{(n-1)}(1,s)}{A_1(s)} \bar{K}_{n-1}(s,0) ds \right] \end{pmatrix} \quad (67)$$

или с учетом формул (109) и (71), (73) главы 1 столбец (67) примет вид:

$$\begin{pmatrix} H_{n-1}(1) \\ \dots\dots\dots \\ H_{n-1}^{(n-2)}(1) \\ H_{n-1}^{(n-1)}(1) + N_{n-1}(1) \end{pmatrix} \quad (68)$$

Из (40) и формул (69), (109) главы 1 для элементов остальных столбцов определителя Δ имеем:

$$\begin{aligned} u_i^{(j)}(1) &\equiv T_i^{(j)}(1), i, j = \overline{0, n-2}, \\ u_i^{(n-1)}(1) &\equiv T_i^{(n-1)}(1) + S_i(1) \end{aligned} \quad (69)$$

Таким образом, в силу (68), (69) сравнивая Δ с определителем $\overline{\omega}(1)$ (см. формулу (80) гл.1), получаем $\Delta = \overline{\omega}(1)/A_1(0)$. Тогда из предположения V следует $\Delta \neq 0$.

Следовательно, система уравнений (60_k) , $k=0,1,\dots$ разрешима относительно $a_k^0, \dots, a_k^{n-2}, c_k$, $k=0,1,\dots$. Обозначим это решение через $\bar{a}_k^0, \dots, \bar{a}_k^{n-2}, \bar{c}_k$.

Теорема 5. Пусть выполнены все условия теоремы 4. Тогда при достаточно малых ε в некоторой достаточно малой окрестности значений $\bar{a}_0^0, \dots, \bar{a}_0^{n-2}, \bar{c}_0$ существуют единственные $a^0 = a^0(\varepsilon), \dots, a^{n-2} = a^{n-2}(\varepsilon), c = c(\varepsilon)$, представимые в виде: $a^0 = \bar{a}_0^0 + O(\varepsilon), \dots, a^{n-2} = \bar{a}_0^{n-2} + O(\varepsilon), c = \bar{c}_0 + O(\varepsilon)$ и такие, что решение $y(t, a^0, \dots, a^{n-2}, c, \varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (3) на отрезке $0 \leq t \leq 1$ является единственным решением $y(t, \varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (2) и это решение допускает следующее асимптотическое разложение:

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k y_k(t, \bar{a}_k^0, \dots, \bar{a}_k^{n-2}, \bar{c}_k) + \varepsilon^{n-2} \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k w_k(\tau) + R_N(t, \varepsilon), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad (70)$$

а для остаточного члена $R_N(t, \varepsilon)$ справедливы оценки:

$$|R_N^{(i)}(t, \varepsilon)| \leq K \varepsilon^{N+1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (71)$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от t и ε .

Доказательство. Докажем разрешимость системы уравнений (55) относительно $a^0, \dots, a^{n-2}, c$. Для этого сначала обратимся к уравнению (13₀) с начальными условиями (21₀) и

продифференцируем по параметрам $a_0^0, \dots, a_0^{n-2}, c_0$. Тогда, вводя обозначение:

$$z_{i0}(t) = \begin{cases} \frac{\partial y_0(t, a_0^0, \dots, a_0^{n-2}, c_0)}{\partial a_0^i}, & i = \overline{0, n-2}, \\ \frac{\partial y_0(t, a_0^0, \dots, a_0^{n-2}, c_0)}{\partial c_0}, & i = n-1 \end{cases} \quad (72)$$

относительно $z_{i0}(t)$ получим линейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$L_0 z_{i0}(t) = \int_0^1 [K_0(t, x) z_{i0}(x) + K_1(t, x) z'_{i0}(x) + \dots + K_{n-1}(t, x) z_{i0}^{(n-1)}(x)] dx + G_i(t) \quad (73)$$

с начальными условиями:

$$z_{i0}^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad i, j = \overline{0, n-2}, \quad (74)$$

$$z_{n-10}^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, & j = \overline{0, n-3}, \\ \frac{1}{A_1(0)}, & j = n-2, \end{cases}$$

где

$$G_i(t) = \begin{cases} 0, & i = \overline{0, n-2}, \\ \frac{K_{n-1}(t, 0)}{A_1(0)}, & i = n-1. \end{cases} \quad (75)$$

Аналогично решению $y_k(t)$ задачи (13_к), (21_к), представимое в виде (39_к), решение $z_{i0}(t)$ задачи (73), (74) имеет вид:

$$z_{i0}(t) = z_{i0}(0)u_0(t) + \dots + z_{i0}^{(n-2)}(0)u_{n-2}(t) + q_i(t), \quad (76)$$

$$i = \overline{0, n-1},$$

где $u_l(t), l = \overline{0, n-2}$ выражается формулой (40), а

$$q_i(t) = \int_0^t \frac{\Psi_{n-2}(t, s)}{A_1(s)} [G_i(s) + \int_0^1 R(s, \xi) G_i(\xi) d\xi] ds. \quad (77)$$

Из (76) с учетом (61), (74), (75), (77) окончательно получаем решение задачи (73), (74) в виде:

$$z_{i0}(t) = u_i(t), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (78)$$

где $u_i(t), i = \overline{0, n-1}$ - выражаются в виде (40), (61).

Теперь обратимся к сингулярно возмущенной задаче (1), (3) и продифференцируем ее по параметрам $a^0, \dots, a^{n-2}, c$ и вводя обозначение:

$$z_i(t, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{\partial y(t, a^0, \dots, a^{n-2}, c, \varepsilon)}{\partial a^i}, & i = \overline{0, n-2}, \\ \frac{\partial y(t, a^0, \dots, a^{n-2}, c, \varepsilon)}{\partial c}, & i = n-1 \end{cases} \quad (79)$$

получим следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$L_\varepsilon z_i = \int_0^1 [K_0(t, x)z_i(x, \varepsilon) + K_1(t, x)z'_i(x, \varepsilon) + \dots + K_{n-1}(t, x)z_i^{(n-1)}(x, \varepsilon)]dx \quad (80)$$

с начальными условиями:

$$z_i^{(j)}(0, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad i = \overline{0, n-2}, \quad j = \overline{0, n-1},$$

$$z_{n-1}^{(j)}(0, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & j = \overline{0, n-2}, \\ \frac{1}{\varepsilon}, & j = n-1 \end{cases} \quad (81)$$

Сингулярно возмущенная задача (80), (81) того же типа, что и задача (1), (3). Следовательно, в силу теоремы 4 асимптотическое разложение решений задачи (80), (81) при $t = 1$ имеет вид:

$$z_i^{(j)}(1, \varepsilon) = z_{i0}^{(j)}(1) + O(\varepsilon), \quad i, j = \overline{0, n-1}, \quad (82)$$

где $z_{i0}(t)$ — решение задачи (73), (74) и имеет вид (78).

Из (82) с учетом (66), (78) имеем:

$$\begin{vmatrix} z_0(1, \varepsilon) & \dots & z_{n-1}(1, \varepsilon) \\ z'_0(1, \varepsilon) & \dots & z'_{n-1}(1, \varepsilon) \\ \dots & \dots & \dots \\ z_0^{(n-1)}(1, \varepsilon) & \dots & z_{n-1}^{(n-1)}(1, \varepsilon) \end{vmatrix} = \Delta + O(\varepsilon) \quad (83)$$

Так как $\Delta \neq 0$, то из (83) получаем:

$$\begin{vmatrix} z_0(1, \varepsilon) & \dots & z_{n-1}(1, \varepsilon) \\ z'_0(1, \varepsilon) & \dots & z'_{n-1}(1, \varepsilon) \\ \dots & \dots & \dots \\ z_0^{(n-1)}(1, \varepsilon) & \dots & z_{n-1}^{(n-1)}(1, \varepsilon) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (84)$$

Если учесть обозначения (79), то из (84) следует однозначная разрешимость системы уравнений (55) относительно $a^0, \dots, a^{n-2}, c$.

Докажем теперь существование и единственность решения задачи (1), (2). Для этого рассмотрим уравнение (1) с начальными условиями:

$$y^{(i)}(0, \bar{a}_0^0, \dots, \bar{a}_0^{n-2}, \bar{c}_0, \varepsilon) = \begin{cases} \bar{a}_0^i, & i = \overline{0, n-2}, \\ \bar{c}_0, & i = n-1, \\ \varepsilon, & \end{cases} \quad (85)$$

где $\bar{a}_0^i, i = \overline{0, n-2}, \bar{c}_0$ — уже известные параметры, найденные как решение системы (56₀).

По теореме 4 решение $y(t, \bar{a}_0^0, \dots, \bar{a}_0^{n-2}, \bar{c}_0, \varepsilon)$ задачи (1), (85) на отрезке $0 \leq t \leq 1$ существует, единственно и при $t = 1$ имеет представление:

$$y^{(i)}(1, \bar{a}_0^0, \dots, \bar{a}_0^{n-2}, \bar{c}_0, \varepsilon) = y_0^{(i)}(1, \bar{a}_0^0, \dots, \bar{a}_0^{n-2}, \bar{c}_0) + O(\varepsilon), i = \overline{0, n-1} \quad (86)$$

Из (86) с учетом (56₀) получим:

$$y^{(i)}(1, \bar{a}_0^0, \dots, \bar{a}_0^{n-2}, \bar{c}_0, \varepsilon) = \alpha_i + O(\varepsilon), i = \overline{0, n-1}, \quad (87)$$

т.е. решение $y(t, \bar{a}_0^0, \dots, \bar{a}_0^{n-2}, \bar{c}_0, \varepsilon)$ задачи (1), (85) удовлетворяет системе уравнений (55) с точностью порядка $O(\varepsilon)$.

Из (55) и (87) имеем:

$$y^{(i)}(1, a^0, \dots, a^{n-2}, c, \varepsilon) - y^{(i)}(1, \bar{a}_0^0, \dots, \bar{a}_0^{n-2}, \bar{c}_0, \varepsilon) = O(\varepsilon), \quad i = \overline{0, n-1} \quad (88)$$

Из (88) непосредственно следует представление:

$$\begin{aligned} a^i &= \bar{a}_0^i + O(\varepsilon), \quad i = \overline{0, n-2}, \\ c &= \bar{c}_0 + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (89)$$

Таким образом, при достаточно малых ε , в некоторой достаточно малой окрестности значений $\bar{a}_0^0, \dots, \bar{a}_0^{n-2}, \bar{c}_0$ существуют единственные $a^0, \dots, a^{n-2}, c$, представимые в

виде (89). Тогда решение $y(t, a^0, \dots, a^{n-2}, c, \varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (3) на отрезке $0 \leq t \leq 1$ является единственным решением сингулярно возмущенной задачи (1), (2) и оно имеет представление (70).

Докажем теперь оценки (71). С этой целью рассмотрим уравнение (1) со следующими начальными условиями:

$$y^{(i)}(0, \mathfrak{a}^0, \dots, \mathfrak{a}^{n-2}, \mathfrak{c}, \varepsilon) = \begin{cases} \mathfrak{a}^i, & i = \overline{0, n-2}, \\ \mathfrak{c}, & i = n-1, \\ \varepsilon, & i = n, \end{cases} \quad (90)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^i &= \bar{a}_0^i + \varepsilon \bar{a}_1^i + \dots + \varepsilon^N \bar{a}_N^i, i = \overline{0, n-2}, \\ \mathfrak{c} &= \bar{c}_0 + \varepsilon \bar{c}_1 + \dots + \varepsilon^N \bar{c}_N, \end{aligned} \quad (91)$$

причем коэффициенты $\bar{a}_k^i, i = \overline{0, n-2}, \bar{c}_k$ при $k = \overline{0, N}$ являются уже известными параметрами, найденными из системы (56_k).

По теореме 4 решение $y(t, \mathfrak{a}^0, \dots, \mathfrak{a}^{n-2}, \mathfrak{c}, \varepsilon)$ задачи (1), (90) при $t = 1$ имеет представление:

$$\begin{aligned} y^{(i)}(1, \mathfrak{a}^0, \dots, \mathfrak{a}^{n-2}, \mathfrak{c}, \varepsilon) &= y_0^{(i)}(1, \bar{a}_0^0, \dots, \bar{a}_0^{n-2}, \bar{c}_0) + \\ &+ \varepsilon y_1^{(i)}(1, \bar{a}_1^0, \dots, \bar{a}_1^{n-2}, \bar{c}_1) + \dots + \\ &+ \varepsilon^N y_N^{(i)}(1, \bar{a}_N^0, \dots, \bar{a}_N^{n-2}, \bar{c}_N) + O(\varepsilon^{N+1}), \end{aligned} \quad (92)$$

$i = \overline{0, n-1}$

С учетом (56₀), (56_k) из (92) получим:

$$y^{(i)}(1, \mathfrak{E}^0, \dots, \mathfrak{E}^{n-2}, \mathfrak{E}, \varepsilon) = \alpha_i + O(\varepsilon^{N+1}), i = \overline{0, n-1} \quad (93)$$

Следовательно, решение $y(t, \mathfrak{E}^0, \dots, \mathfrak{E}^{n-2}, \mathfrak{E}, \varepsilon)$ задачи (1), (90) удовлетворяет системе уравнений (55) с точностью порядка $O(\varepsilon^{N+1})$. Тогда из (93) с учетом (55), имеем:

$$\begin{aligned} y^{(i)}(1, a^0, \dots, a^{n-2}, c, \varepsilon) - y^{(i)}(1, \mathfrak{E}^0, \dots, \mathfrak{E}^{n-2}, \mathfrak{E}, \varepsilon) = \\ = O(\varepsilon^{N+1}), i = \overline{0, n-1} \end{aligned} \quad (94)$$

Из (94) непосредственно следует представление:

$$\begin{aligned} a^i &= \mathfrak{E}^i + O(\varepsilon^{N+1}), \quad i = \overline{0, n-2}, \\ c &= \mathfrak{E} + O(\varepsilon^{N+1}), \end{aligned}$$

т.е. параметры $a^i, c, i = \overline{0, n-2}$ представимы в виде:

$$\begin{aligned} a^i &= \bar{a}_0^i + \varepsilon \bar{a}_1^i + \dots, \quad i = \overline{0, n-2}, \\ c &= \bar{c}_0 + \varepsilon \bar{c}_1 + \dots \end{aligned}$$

Тогда из теоремы 4 получим оценки (71). Теорема 5 доказана.

Пример.

В заключение для иллюстрации полученных результатов рассмотрим вновь задачу (125), (123) главы 1, обладающую явлением начального скачка первого порядка:

$$\begin{cases} \varepsilon y''' + y'' = 2 \int_0^1 y''(x) dx \\ y^{(i)}(1, \varepsilon) = \alpha_i, i = 0, 1, 2 \end{cases} \quad (95)$$

Точное решение задачи (95) выражается формулой (142) главы 1. Так как решение задачи (95) в точке $t = 0$ обладает явлением начального скачка первого порядка, то для построения асимптотики решения задачи (95) предварительно рассмотрим вспомогательную задачу Коши с начальным скачком:

$$y(0, \varepsilon) = a^0(\varepsilon), y'(0, \varepsilon) = a^1(\varepsilon), y''(0, \varepsilon) = \frac{c(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad (96)$$

где $a^0(\varepsilon), a^1(\varepsilon), c(\varepsilon)$ представимы в виде асимптотического ряда по степеням ε :

$$\begin{aligned} a^i(\varepsilon) &= a_0^i + \varepsilon a_1^i + \dots, \quad i = 0, 1, \\ c(\varepsilon) &= c_0 + \varepsilon c_1 + \dots, \quad c_0 \neq 0 \end{aligned}$$

Найдем регулярный член нулевого приближения $y_0(t)$, который является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} y_0'' = 2 \int_0^1 y_0''(x) dx + \Delta(t), \\ y_0(0) = a_0^0, y_0'(0) = a_0^1 + \Delta a_0^1, \end{cases} \quad (97)$$

где

$$\Delta(t) = 2c_0, \Delta a_0^1 = c_0 \quad (98)$$

Решение задачи (97) с учетом (98) имеет вид:

$$y_0(t) = a_0^0 + (a_0^1 + c_0)t - c_0 t^2. \quad (99)$$

Пограничный член нулевого приближения $w_0(\tau)$ определяется из следующей задачи:

$$\begin{cases} \ddot{w}_0(\tau) + \ddot{w}_0(\tau) = 0, \\ w_0(0) = c_0, \dot{w}_0(0) = -c_0, \ddot{w}_0(0) = c_0 \end{cases} \quad (100)$$

откуда имеем:

$$w_0(\tau) = c_0 \exp(-\tau) \quad (101)$$

Найдем a_0^0, a_0^1, c_0 . Для этого подставим (99) в начальные условия $y_0(1) = \alpha_0, y_0'(1) = \alpha_1, y_0''(1) = \alpha_2$. Тогда получаем систему алгебраических уравнений относительно a_0^0, a_0^1, c_0 :

$$\begin{cases} a_0^0 + a_0^1 = \alpha_0, \\ a_0^1 - c_0 = \alpha_1, \\ -2c_0 = \alpha_2. \end{cases} \quad (102)$$

Система (102) в силу линейности задачи (97) имеет единственное решение:

$$a_0^0 = \alpha_0 - \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}, a_0^1 = \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2}, c_0 = -\frac{\alpha_2}{2}. \quad (103)$$

Подставляя (103) в (99) и (101) получаем коэффициенты нулевого приближения $y_0(t), w_0(\tau)$ (главные члены асимптотики):

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \alpha_0 - \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + (\alpha_1 - \alpha_2)t + \frac{\alpha_2}{2}t^2, \\ w_0(\tau) &= -\frac{\alpha_2}{2}\exp(-\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (104)$$

причем из (104) видно, что $y_0(t) \equiv \bar{y}(t)$ (см.(143) гл. 1).

Из вида точного решения задачи (95), выражаемого формулой (142) главы 1, для ее решения $y(t, \varepsilon)$ с учетом (104) следует представление: $y(t, \varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon w_0(\tau) + O(\varepsilon)$ т.е. для данной задачи (95) теорема 5 будет справедливой.